Notits om geografiske Kaartprojektioner.

Af

Generalmajor Zachariae.

(Meddelt i Mødet den 20. Marts 1896.)

I.

Det efter vore Forhold ret betydelige Kaartværk, som udarbejdes af Oberstløjtnant A. Staggemeier og for Tiden er under Udgivelse, forekommer mig at frembyde Interesse som et vel gennemtænkt og konsekvent udført Arbejde, og jeg fandt mig derfor foranlediget til nærmere at betragte den ved en Del af Værket anvendte saakaldte «Centralprojektion». Herved førtes jeg imidlertid tilbage til nogle af mig i sin Tid foretagne Undersøgelser vedrørende perspektiviske Projektioner, og da disse Undersøgelser ikke tidligere ere bekendtgjorte og dog muligen kunde frembyde nogen Interesse, gør jeg dem her til Genstand for en Meddelelse i Forbindelse med nogle Bemærkninger om en mulig Realisation af Staggemeiers Ideer ved andre Projektioner, deriblandt saadanne, der vilde give en konform Afbildning af hele Jordoverfladen.

II.

Som bekendt kan hverken et sfærisk eller et sfæroidisk Areal nøjagtig overføres paa et Plan, og det er derfor umuligt at fremstille et større Areal af Kloden paa et plant Kaart uden at derved opstaar kendelige Forvanskninger. Jo større Arealet er, desto større blive Forvanskningerne, de ere uundgaaelige, men kunne ved forskellige Overførelsesmaader — forskellige Kaartprojektioner — føres i forskellige Retninger, og Opgaven maa derfor blive at føre Forvanskningen ind i saadanne Retninger, at den ikke indvirker skadeligt ved den Anvendelse, man fortrinsvis vil gøre af Kaartet. Et Søkaart, der skal bruges til Navigering, maa tillade en let Bestemmelse af den Kurs, man skal holde for at naa fra et Punkt til et andet; det maa derfor vedligeholde Vinklerne, derimod er det for Sejladsens Skyld ikke nødvendigt, at det vedligeholder Arealerne, og paa denne Egenskab maa der følgelig gives Afkald ved Søkaart; thi det er umuligt at konstruere et Kaart, der baade vedligeholder Vinkler og Arealer. Skal Kaartet derimod finde Anvendelse ved Arealudmaaling, maa ligestore Arealer paa Kloden fremstilles som ligestore Arealer paa Kaartet; dette maa derfor vedligeholde Arealerne, men hermed følger nødvendig Vinkelforvanskning, saaledes at exempelvis et lille Rektangel paa Kloden kan fremstilles paa Kaartet ved en mere eller mindre skæv Firkant. Man kan ogsaa stille sig den Opgave, at fremstille et Kaart, paa hvilket man fra et enkelt bestemt Punkt under Anvendelse af samme Maalestoksforhold nøjagtigt maaler Afstande til alle andre Punkter; men dette kan ikke forenes med nøjagtig Afstandsmaaling mellem de andre Punkter efter samme Maalestoksforhold; disse Afstande maa forvanskes i større eller mindre Grad.

Valget af Projektion til Fremstilling af et Kaart er altsaa efter sin Natur et ubestemt Problem, der imidlertid til en vis Grad bestemmes ved de Betingelser, som man ønsker at Kaartet fortrinsvis skal opfylde. Det stiller sig for mig som fordelagtigst, saa vidt muligt altid at anvende saakaldte konforme Projektioner, der give Kaart med samme Maalestoksforhold i alle fra s a m m e Punkt udgaaende Retninger. Vistnok følger heraf med Nødvendighed, at Maalestoksforholdet maa variere fra Punkt til andet; men da Variationen er given ved det paa

Kaartet afsatte geografiske Gradnet, vil man overalt kende Maalestokken og derfor overalt kunne tage ret nøjagtige Maal. Det er bekendt, at Konformitet og Vedligeholdelse af Vinklerne betegne samme Egenskab ved en Kaartprojektion.

III.

Idet vi her kun tænke paa geografiske Kaart i lille Maalestok, vil det være tilstrækkeligt at betragte Jorden som en Kugle. Kaartets Midtpunkt O vælges omtrent midt i det Terrain, man vil fremstille, og ved den perspektiviske Fremstilling lægges Øjepunktet $Ø$ et eller andet Sted i Diametren til Kaartets Midtpunkt; dette Sted betegnes ved Afstanden D fra Jordcentret. Naar D er bestemt, er Projektionen bestemt. Projektionsplanet er altid vinkelret paa Diameteren $OØ$, og vi vælge her at føre den gennem Jordcentret o, der derfor tillige betegner Projektionen af Midtpunktet O. Et vilkaarligt Punkt Q paa Kloden, hvis Vinkelafstand fra O bestemmes ved Storcirkelbuen $OQ = \delta$, fremstilles i Projektion ved det Punkt q, hvori Synslinien $ØQ$ skærer Projektionsplanet, og naar Jordradien tages til Enhed, faar man for Projektionen q's Afstand fra Kaartets Midtpunkt o

$$oq = \frac{D \sin \delta}{D + \cos \delta}. \tag{1}$$

Vil man nu have en klar Forestilling om Maalestoksforholdets Variation i de forskellige fra Punktet q udgaaende Retninger, behøver man kun at tænke sig en Cirkel om Q med uendelig lille Radius ds; den projiceres nemlig paa Kaartet som en Ellipse med Centrum i q, Halvaxer mds og nds henholdsvis i Retning af oq og vinkelret derpaa, idet m og n betegne Maalestoksforholdene i de to Retninger, som vi i det følgende for Kortheds Skyld benævne den radielle og den perpendikulære. Maalestoksforholdet r i en vilkaarlig fra q udgaaende Retning, der paa Kaartet danner Vinklen v med den radielle, er da bestemt ved

$$r^2 = \frac{m^2 n^2}{m^2 \sin^2 v + n^2 \cos^2 v}, \tag{2}$$

og den nødvendige, men ogsaa tilstrækkelige Betingelse for Konformitet er $m = n$, hvorved Ellipsen omdannes til en Cirkel.

I Forbindelse hermed ville vi søge et Udtryk for Vinkelforvanskningen. Naar V er den Vinkel paa Kloden, som i Projektion betegnes ved v, og man forestiller sig den uendelig lille retvinklede Trekant i Q, hvis Katheter ere ds og $ds \operatorname{tg} V$, saa vil dens Projektion faa Katheterne henholdsvis mds og $nds \operatorname{tg} V$ og følgelig give

$$\frac{\operatorname{tg} v}{\operatorname{tg} V} = \frac{n}{m}.$$

For Vinkelforvanskningen $V - v$ faas da

$$\operatorname{tg}(V - v) = \frac{(m-n) \operatorname{tg} v}{n + m \operatorname{tg}^2 v} = \frac{(m-n) \operatorname{tg} V}{m + n \operatorname{tg}^2 V},$$

alt eftersom man vil angive Retningen ved v paa Kaartet eller ved V paa Kloden. Betingelsen for, at Vinkelforvanskningen er Nul, angives altsaa ved $m = n$, og heri har man Bekræftelse paa, at Konformitet og Vedligeholdelse af Vinklerne kun ere forskellige Udtryk for den samme Egenskab ved Projektionen.

Maximum af Vinkelforvanskning bestemmes ved at søge Maximum for et Udtryk af Formen

$$y = \frac{(m-n)x}{n + mx^2} = \frac{(m-n)z}{m + nz^2}$$

og svarer til

$$x^2 = \frac{n}{m}, \quad y = \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}, \quad z^2 = \frac{m}{n}.$$

Er altsaa U og u Værdierne af V og v, der give Maximum af Vinkelforvanskning, haves for dette Maximum

$$U - u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}.$$

Det sees endvidere, at

$$xz = \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} U = 1,$$

saa at U og u ere Komplementvinkler, idet

$$U + u = (2p+1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

IV.

Udtrykket (2) viser, at Maalestoksforholdet vil være bekendt, naar m og n ere bekendte. Det radielle Forhold m er bestemt ved Forholdet mellem de sammenhørende Tilvæxter til oq og δ og kan derfor findes ved Differentiation af (1) med Hensyn til δ. Saaledes erholdes

$$m = \frac{D(1+D\cos\delta)}{(D+\cos\delta)^2}. \qquad (3)$$

Det perpendikulære Maalestoksforhold n bestemmes ved Kvotienten $Øq : ØQ$, som naar $Øq$ og $ØQ$ tænkes projicerede paa Linien $ØO$, giver

$$n = \frac{D}{D+\cos\delta}. \qquad (4)$$

Ved Udtrykkene (2), (3) og (4) kunne Spørgsmaal vedrørende lineære Maalestoksforhold ved perspektiviske Projektioner besvares. Hvad angaar Arealmaalestoksforholdet μ, der er Kvotienten af det uendelig lille Areal paa Kaartet og det tilsvarende paa Kloden — exempelvis af Ellipsen $\pi mnds^2$ og Cirklen πds^2 — da fremstilles det ved Produktet mn og bliver:

$$\mu = \frac{D^2(1+D\cos\delta)}{(D+\cos\delta)^3}. \qquad (5)$$

Det har sin Interesse at bestemme Maximums- og Minimumsværdierne for disse Udtryk. Vi begynde da med (3), hvis Differentialkvotient er

$$\frac{dm}{d\delta} = \frac{(2+D\cos\delta-D^2)\sin\delta}{(D+\cos\delta)^3} D.$$

De omspurgte Værdier for m svare altsaa til $\delta = 0$ ɔ: Kaartets Midtpunkt, og til $\delta = \delta^*$, hvor δ^* bestemmes af

$$2+D\cos\delta^*-D^2 = 0,$$

altsaa af

$$\cos\delta^* = \frac{D^2-2}{D},$$

og de søgte Værdier for m blive

$$m_0 = \frac{D}{D+1} \quad \text{og} \quad m^* = \frac{D^3}{4(D^2-1)}. \qquad (6)$$

Af (4) ses umiddelbart, at n stadig voxer med Afstanden δ fra Midtpunktet O; det perpendikulære Maalestoksforhold er altsaa mindst i Kaartets Midtpunkt o og voxer herfra ud mod Randene.

For Arealmaalestoksforholdet giver Udtrykket (5)

$$\frac{d\mu}{d\delta} = \frac{(3+2D\cos\delta - D^2)\sin\delta}{(D+\cos\delta)^4} D^2,$$

der bliver Nul for $\delta = 0$ og for $\delta = \delta^*$ bestemt ved

$$3 + 2D\cos\delta^* - D^2 = 0,$$

altsaa ved

$$\cos\delta^* = \frac{D^2-3}{2D}.$$

De tilsvarende Værdier for μ blive i Henhold til (5)

$$\mu_0 = \frac{D^2}{(D+1)^2} \quad \text{og} \quad \mu^* = \frac{4}{27} \cdot \frac{D^5}{(D^2-1)^2}.$$

V.

Da m for enhver Værdi af D varierer med δ, gives der ikke nogen perspektivisk Projektion, som vedligeholder det radielle Maalestoksforhold. Spørgsmaalet bliver da at bestemme den Værdi af D, som med størst Tilnærmelse vedligeholder m. Spørgsmaalet har fundet forskellige Besvarelser, men det forekommer mig, at det løses simplest og bedst ved K a a r t m e d s a m m e r a d i e l l e M a a l e s t o k s f o r h o l d i M i d t e n o g v e d R a n d e n. Lad den Værdi af δ, som svarer til Randen, være γ, saa giver (3) til Bestemmelse af saadanne Projektioner

$$\frac{D}{D+1} = \frac{D(1+D\cos\gamma)}{(D+\cos\gamma)^2}$$

eller

$$D^2 - D - (1+\cos\gamma) = 0,$$

der atter med Udelukkelse af negative Værdier for D giver

$$D = \frac{1+\sqrt{5+4\cos\gamma}}{2}.$$

Projektionen varierer altsaa med Størrelsen af det Areal, man vil fremstille. Her følger nogle Exempler; α er et Udtryk for den største Variation i det radielle Maalestoksforhold, hvis nærmere Betydning vil fremgaa af det følgende:

a) til	$\gamma = 0$	svarer $D = 2$	og $a = 0$
b) »	$\gamma = 24°$	» $D = 1,971$	» $a = 0,0001$
c) »	$\gamma = 60°$	» $D = 1,823$	» $a = 0,0047$
d) »	$\gamma = 74°,45$	» $D = 1,732$	» $a = 0,0121$
e) »	$\gamma = 90°$	» $D = 1,618$	» $a = 0,0287$
f) »	$\gamma = 113°,5$	» $D = 1,423$	» $a = 0,0896$

Med Hensyn til Valget af disse Exempler bemærkes:

a) angiver Grænsen, nemlig det uendelig lille Areal.

b) svarer til et Areal som Europa.

c) kan benyttes til en samlet Fremstilling af Europa, Asien, Afrika og Australlandet.

d) anbefales af Parent til Fremstilling af Halvkuglen og er af Oberstløjtnant Staggemeier benyttet til Zonen mellem Polen og Parallelen 30°. Efter det ovenfor angivne Kriterium svarer den næsten nøjagtigt til Middeltallet af de nævnte to Zoner, nemlig til $\gamma = 74°,45$, medens det omtalte Middeltal er $\frac{1}{2}(90° + 60°) = 75°$.

e) svarer til Halvkuglen.

f) kan benyttes til Fremstilling af næsten den hele beboede Verden, nemlig det samme Areal som c) forøget med Amerika. Den engelske Oberst James har til dette Arealomraade anvendt $D = 1,5$, medens Clarke har foreslaaet $D = 1,367$. Middeltallet af disse to Værdier, nemlig $D = 1,433$, nærmer sig stærkt til den paa vort Kriterium hvilende Værdi $D = 1,423$.

Ved de i nærværende Artikel behandlede Projektioner opnaar det radielle Maalestoksforhold sit Maximum m^* mellem Midten og Randen, nemlig ifølge IV m^* svarende til $D \cos \delta^* = D^2 - 2$, og da der tillige kun er denne ene Maximumsværdi, vil

$$m^* - m_0 = m^* - m_\gamma$$

angive den største Forskel i det radielle Maalestoksforhold paa hele Kaartet. Naar man derfor overalt paa Kaartet vil anvende samme Værdi for m, maa hertil aabenbart vælges Middelværdien af m_0 og m^*, altsaa

$$m = \tfrac{1}{2}(m_0 + m^*).$$

De fra Normalmaalestokken m mest afvigende Værdier m^*, m_0 og m_γ kunne da udtrykkes ved

$$m_0 = m(1-\alpha) = m_\gamma.$$
$$m^* = m(1+\alpha),$$

idet α henset til ovenstaaende Udtryk og til (6) bestemmes af

$$\alpha = \frac{m^* - m_0}{m^* + m_0} = \frac{(D-2)^2}{(D-2)^2 + 8(D-1)}$$

og angiver den største paa Kaartet forekommende Afvigelse i det radielle Normalmaalestoksforhold. Talværdierne for α svarende til de ovenfor anførte Exempler paa forskellige perspektiviske Projektioner ere opførte ved disse.

Det Sted af Kaartet, hvor det radielle Normalmaalestoksforhold gælder med fuld Nøjagtighed, bestemmes under Henvisning til Udtrykkene (3) og (6) ved at finde δ af Ligningen

$$\frac{1 + D\cos\delta}{(D + \cos\delta)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{D+1} + \frac{D^2}{4(D^2-1)}\right).$$

VI.

Af Udtrykket (5) for Arealmaalestokken μ følger, at der ikke gives nogen perspektivisk Projektion, som vedligeholder Arealerne; thi der gives ikke nogen Værdi af D, som gør μ konstant, naar δ varierer. Der er derfor Anledning til at bestemme de perspektiviske Projektioner, som give samme Arealmaalestoksforhold i Midten og ved Randen. Betegner γ den Værdi af δ, der svarer til Randen, giver (5) til Bestemmelsen af D for Projektioner med den forlangte Egenskab

$$\frac{D^2}{(1+D)^2} = \frac{D^2(1 + D\cos\gamma)}{(D + \cos\gamma)^3}$$

eller

$$D^3 - D^2 - (2 + 3\cos\gamma) D - (1 + \cos\gamma + \cos^2\gamma) = 0,$$

som viser, at D afhænger af Grænseværdien γ for δ, altsaa af Størrelsen af den Zone, der skal fremstilles. Nedenfor anføres nogle Exempler:

a)	til	$\gamma = 0$	svarer	$D = 3$	og	$\alpha = 0$	
b)	»	$\gamma = 24°$	»	$D = 2{,}9345$	»	$\alpha = 0{,}0002$	
c)	»	$\gamma = 60°$	»	$D = 2{,}6029$	»	$\alpha = 0{,}0083$	
d)	»	$\gamma = 74°{,}45$	»	$D = 2{,}4006$	»	$\alpha = 0{,}0219$	
e)	»	$\gamma = 90°$	»	$D = 2{,}1479$	»	$\alpha = 0{,}0540$	
f)	»	$\gamma = 113°{,}5$	»	$D = 1{,}7228$	»	$\alpha = 0{,}1837$,	

hvor α er den største Afvigelse fra det normale Arealmaalestoksforhold, idet man med Betegnelserne μ_0 og μ_γ for Arealmaalestoksforholdet i Midten og ved Randen, $\mu^\star$ og μ for dets Maximumsværdi og Normalværdi erholder

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\mu^\star + \mu_0),$$

$$\mu_0 = \mu(1 - \alpha) = \mu_\gamma,$$

$$\mu^\star = \mu(1 + \alpha),$$

og under Henvisning til Slutningen af IV

$$\alpha = \frac{\mu^\star - \mu_0}{\mu^\star + \mu_0} = \frac{4D^3 - 27(D-1)^2}{4D^3 + 27(D-1)^2}.$$

Hvis man vilde bestemme det Sted paa Kaartet, hvor Arealet nøjagtig svarer til Normalmaalestokken μ, kan det skee ved at bestemme δ af Ligningen

$$\frac{1 + D\cos\delta}{(D + \cos\delta)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+D)^2} + \frac{4}{27}\,\frac{D^3}{(D^2-1)^2}\right).$$

VII.

Oberstløjtnant Staggemeier deler Kloden i 3 Zoner ved Parallelerne med Bredde $\pm 30°$ og fremstiller Yderzonerne i perspektivisk Polarprojektion svarende til $D = \sqrt{3} = 1{,}732$ og Midtezonen i Mercators Projektion, idet sidstnævnte Zone dog fremstilles til Breden $\pm 45°$ og følgelig griber $15°$ ind over

Yderzonerne. Ved Generalkaartet afbildes hver af Yderzonerne paa 1 Blad, medens Midtezonen tager 3 Blade, der benævnes efter det Atlantiske, det Indiske og det Stille Ocean. Specialkaartets Blade have samme Størrelse som Generalkaartets, men da Maalestokken er dobbelt saa stor, bliver der fire Gange saa mange Blade, nemlig 20, og det hele Kaartværk omfatter ialt 25 Blade, hvert af Størrelse $56^{cm} \times 54^{cm}$.

Medens nu Mercatorprojektionen giver en konform Afbildning af Midtezonen, giver den anvendte perspektiviske Polarprojektion ikke noget konformt Billede af Yderzonerne, hvorimod den tilnærmelsesvis giver konstant Maalestoksforhold langs Meridianerne. Under Henvisning til V, d. kan Tilnærmelsen udtrykkes ved $\alpha = 0{,}0121$; medens Perspektivprojektionen $D = 1{,}823$ (jvfr. V, c) vilde give $\alpha = 0{,}0047$ og den ækvidistante Polarprojektion endog $\alpha = 0$. Sidstnævnte Projektion hører ikke til de perspektiviske, men er bestemt ved Fordringen om konstant m langs Meridianerne, idet en Parallels Radius sættes lig med den rektificerede Meridianbue mellem denne Parallel og Polen. Naar man vil sammenligne de tre her omtalte Polarprojektioner, kan man imidlertid ikke indskrænke sig til at betragte α, der karakteriserer Variationen i det radielle Maalestoksforhold m; man maa tillige se paa det perpendikulære Forhold n, idet Kvotienten $m : n$, eller rettere dens Afvigelse fra Enheden, er et Udtryk for Afvigelsen fra Konformiteten, altsaa for Deformationen i det paagældende Punkt.

Først bemærkes da, at naar Bredden betegnes ved λ, ville Udtrykkene (3) og (4) overføres paa Polarprojektionen ved at ombytte δ med $90° - \lambda$, og man faar altsaa for de perspektiviske Polarprojektioner

$$\frac{m}{n} = \frac{1 + D \sin \lambda}{D + \sin \lambda}, \tag{7}$$

hvor m og n blive Maalestoksforholdene henholdsvis langs Meridianer og Paralleler.

For den ækvidistante Polarprojektion fremgaar Forholdet af følgende Betragtning: Sættes $m = 1$, vil n være Kvotienten af paagældende Parallels Radius paa Kaartet og paa Kloden, altsaa af $\frac{\pi}{2} - \lambda$ og $\cos\lambda = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)$, saa at man for denne Projektion faar:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)}{\frac{\pi}{2} - \lambda}.$$

Det sees af begge disse Udtryk, at Deformationen, udtrykt ved $1 - \frac{m}{n}$, voxer, efterhaanden som man fjerner sig fra Polen ned imod Ækvator. I Kaartets Midtpunkt, der svarer til $\lambda = \frac{\pi}{2}$ og falder sammen med Polen, er den Nul, medens dens Variation fra Polen til Ækvator er forskellig for forskellige Projektioner, saaledes som det fremgaar af nedenstaaende Oversigt over Gangen i denne Variation for de tre her omtalte Polarprojektioners Vedkommende.

Bredde	Deformationen $= 1 - \frac{m}{n}$		
	$D = 1{,}732$	$D = 1{,}823$	Ækvidistant Pr.
90°	0,000	0,000	0,000
60°	0,038	0,041	0,045
45°	0,088	0,095	0,100
30°	0,164	0,177	0,173
0°	0,423	0,451	0,363

Heraf fremgaar, at $D = \sqrt{3} = 1{,}732$ giver en mindre Deformation end de to andre Projektioner i hele den Zone, hvori den anvendes af Staggemeier. Derimod giver den ækvidistante Polarprojektion en afgjort mindre Deformation end de to perspektiviske Projektioner i Zonen nærmest Ækvator, og der kan neppe være Tvivl om, at den, ogsaa i Betragtning af, at den tillige giver $\alpha = 0$, ubetinget maa foretrækkes ved Fremstillingen af den hele Hemisfære mellem Ækvator og Polen. Oberstløjtnant Staggemeier har derfor vistnok givet sin «Centralprojektion» en rigtig Begrænsning, naar han indskrænker dens Anvendelse til Zonen mellem 30° Bredde og Polen.

VIII.

Der frembyder sig her ganske naturligt det Spørgsmaal, om ikke den i VII omtalte Afbildning af hele Kloden kunde foregaa ved Projektioner, der overalt vedligeholde Meridianmaalestoksforholdet, hvorved da er underforstaaet, at de med Nødvendighed maa give en større eller mindre Deformation under de forskellige Bredder. At stille denne Opgave er det samme som at løse den, idet man umiddelbart ser, at Yderzonerne kunne fremstilles i ækvidistant Polarprojektion og Midtezonen i ækvidistant cylindrisk Projektion, hvor Cylindren tangerer langs Ækvator, og Parallelen λ anbringes paa Cylindren i en Afstand fra Ækvator lig med den rektificerede Bue λ. Der staar kun tilbage at bestemme den fordelagtigste Værdi λ^* for Grænseparallelen mellem Yder- og Midtezone, en Værdi, der aabenbart bestemmes derved, at Grænseparallelen skal have samme Størrelse i begge Projektioner. Men Grænseparallelens Radius paa Cylindren er lig med Enheden og har i Polarprojektionen Værdien $\frac{\pi}{2}-\lambda^*$, og λ^* findes derfor af Ligningen

$$\frac{\pi}{2}-\lambda^* = 1,$$

som giver

$$\lambda^* = \frac{\pi}{2}-1 = 0{,}5708,$$

hvis omtrentlige Værdi i Gradmaal er

$$\lambda^* = 32^\circ{,}7,$$

og Skillelinien mellem Yder- og Midtezone bør altsaa henlægges til Bredden $\pm 32^\circ{,}7$.

Et Kaart som det her beskrevne vil overalt give konstant Meridianmaalestoksforhold m, medens Parallelmaalestoksforholdet n i begge de anvendte Projektioner voxer mod Grænseparallelen, idet $m = n$ baade ved Polen og ved Ækvator. Til Vurdering af Deformationen har man i Yderzonen

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\lambda\right)}{\frac{\pi}{2}-\lambda}$$

og i Midtezonen

$$\frac{m}{n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = \cos\lambda.$$

Heraf fremstilles nedenstaaende Oversigt over Deformationen $1 - \frac{m}{n}$.

Bredde	Deformation	Projektion
90°	0,000	
75°	0,011	
60°	0,045	Polar Ækvidistant
45°	0,100	
32°,7	0,159	
32°,7	0,159	
30°	0,134	
20°	0,060	Ækvidistant Cylinder
10°	0,015	
0°	0,000	

IX.

Sluttelig turde der være Anledning til at fremhæve, at man vilde faa en konform Afbildning af hele Kloden ved at fastholde Mercatorprojektionen for Midtezonen og fremstille Yderzonerne i stereografisk Polarprojektion, der som bekendt er den perspektiviske Polarprojektion, der svarer til $D = 1$, og for hvilken ogsaa Udtrykket (7) giver Deformationen Værdien Nul under alle Bredder.

Naar der gaas ud fra samme Værdi for Maalestoksforholdet ved Polen og ved Ækvator, kan dette Forhold udtrykkes ved

$$\frac{2}{1 + \sin\lambda} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\cos\lambda}$$

henholdsvis i Polar- og Mercatorprojektionen. Da nu førstnævnte Udtryk voxer fra Polen mod Ækvator, sidstnævnte fra Ækvator mod Polen, maa der være en mellemfaldende Parallel λ^*, hvor Udtrykkene blive ligestore, og som altsaa bestemmes

af Ligningen $2\cos\lambda^{*} = 1 + \sin\lambda^{*}$,
der giver $\cos\lambda^{*} = 0{,}8$, $\sin\lambda^{*} = 0{,}6$
og $\lambda^{*} = 36^\circ\,52'{,}2$.

Parallelen λ^{*} danner den naturlige Skillelinie for Omraadet af de to Projektioner, men dette udelukker ingenlunde, at det jo letter Benyttelsen af Kaartet i Nærheden af Skillelinien, naar de to Projektioner gribe ind over hinanden paa en lignende Maade som ved Staggemeiers Atlas, hvor Beltet mellem 30° og 45° Bredde fremstilles baade i Mercatorprojektionen og i «Centralprojektionen».

Det er alt tidligere fremhævet, at ved et konformt Kaartværk, altsaa ogsaa ved det i nærværende Artikel omtalte, vil al Deformation i det enkelte Punkt forsvinde, medens dog Maalestokken maa forandre sig fra Punkt til andet, men da denne Forandring er givet paa Kaartet ved det indtegnede geografiske Gradnet, vil en ret nøjagtig Afstandsmaaling ikke frembyde særlig Vanskelighed paa noget Sted af Kaartet. En umiddelbar Betragtning af Afstandsforholdene paa et Kaart vil imidlertid altid gaa ud fra konstant Maalestoksforhold, og det vil derfor have sin Interesse at bestemme Grænsen for den Fejl, som vil begaas ved at anvende samme Maalestok overalt paa den her omhandlede konforme Afbildning af hele Jordoverfladen. Benævnes dette Normalmaalestoksforhold m, bliver med let forstaaelige Betegnelser

$$m = \tfrac{1}{2}(m_0 + m^{*}),$$

hvor $m_0 = \cos\lambda^{*}\cdot m^{*} = 0{,}8m^{*}$ og m^{*} altsaa lig med $1{,}25m_0$, som indsatte i Udtrykket for m giver

$$m = \tfrac{9}{8}m_0 \quad\text{og}\quad m = 0{,}9m^{*},$$

hvoraf endelig

$$m_0 = \left(1 - \tfrac{1}{9}\right)m \quad\text{og}\quad m^{*} = \left(1 + \tfrac{1}{9}\right)m.$$

Vil man finde den Bredde λ, som nøjagtigt svarer til Normalmaalestoksforholdet m, har man for Polarprojektionen

$$\frac{2m_0}{1 + \sin\lambda} = m = \tfrac{9}{8}m_0,$$

hvoraf

$$\sin\lambda = \tfrac{7}{9},$$

$$\lambda = 51^\circ 03',5,$$

og for Mercatorprojektionen

$$\frac{m_0}{\cos\lambda} = m = \tfrac{9}{8} m_0,$$

hvoraf

$$\cos\lambda = \tfrac{8}{9},$$

$$\lambda = 27^\circ 16',0.$$

Idet man gaar fra Polen mod Ækvator, stiller altsaa Gangen i Maalestoksforholdet sig saaledes:

Bredde	Maalestok	Projektion.
90°	$m(1-\frac{1}{9})$	Stereo-grafisk
51° 03',5	m	
36° 52',2	$m(1+\frac{1}{9})$	
36° 52',2	$m(1+\frac{1}{9})$	Mercators
27° 16',0	m	
0°	$m(1-\frac{1}{9})$	

Herved ere saavel Parallelerne for Normalmaalestokken som Parallelerne for de største Afvigelser fra den og Beløbet af disse Afvigelser bestemte.